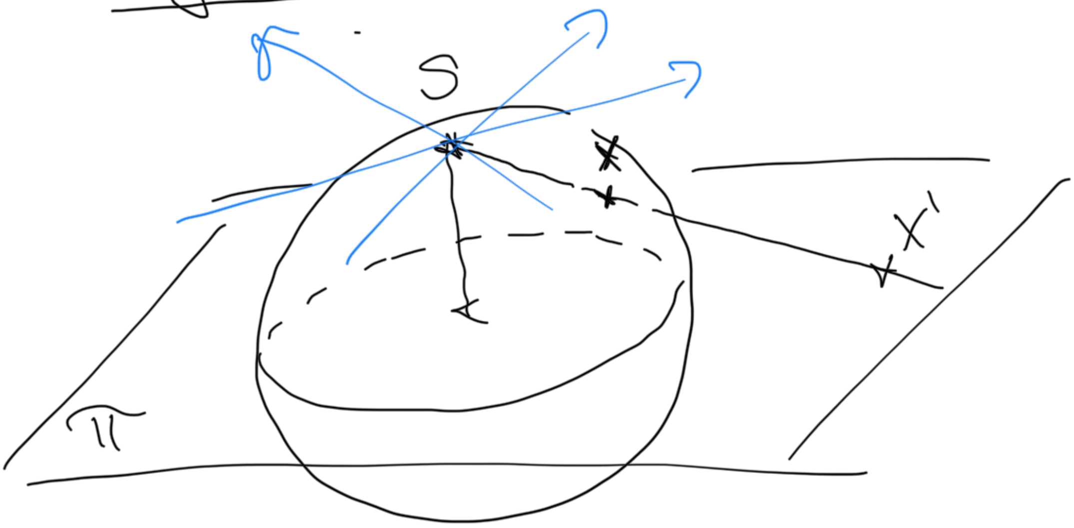
Projektivní rozšíření eukl. prostoru



stereografická projekce

Vztah dvou přímek

různoběžky mají <u>společný bod</u>

rovnoběžky mají spol. <u>směr</u>

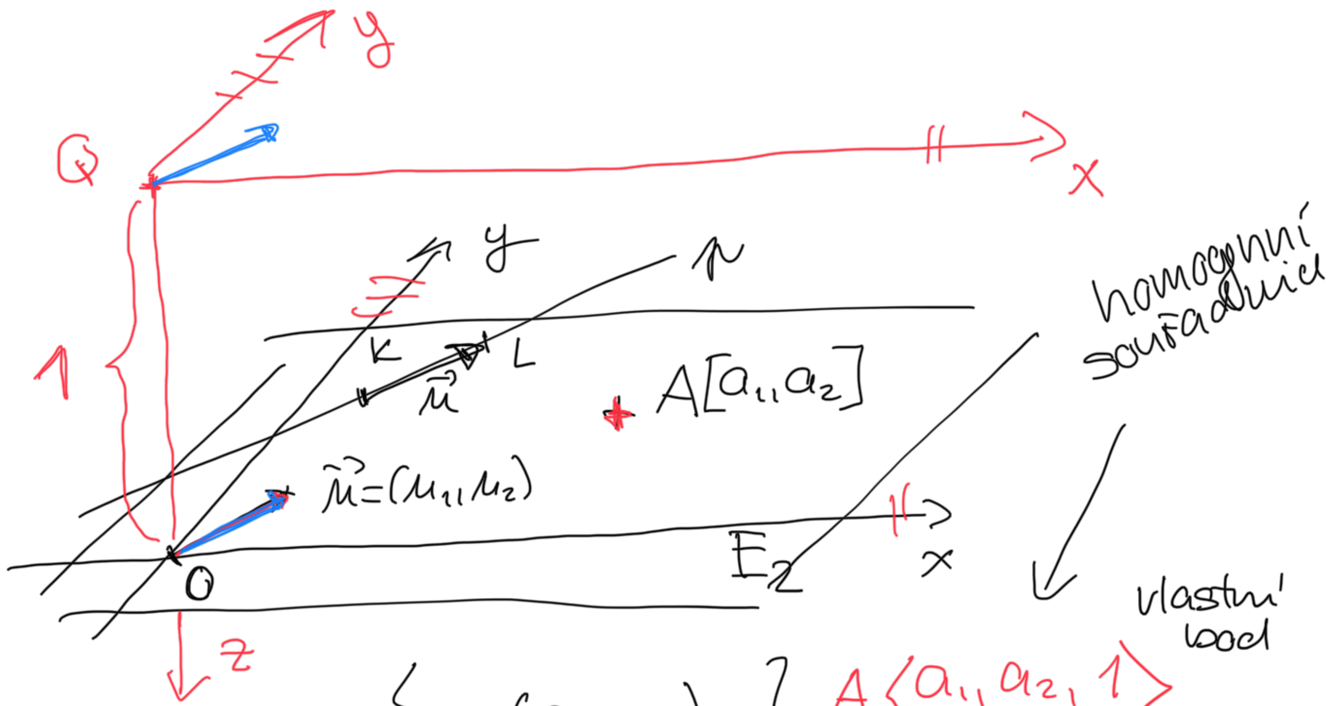
---

pokud směr ztotožníme s bodem
→ každé dvě přímky mají společný bod

⇒ Rozšíření <u>eukleidovského prostoru</u> o nevlastní prvky, body, přímky, roviny ...

Eukleidovská rovina E_2

Projektívne rozšírená eukleidovská rovina $\overline{E}_2$



vlastný bod

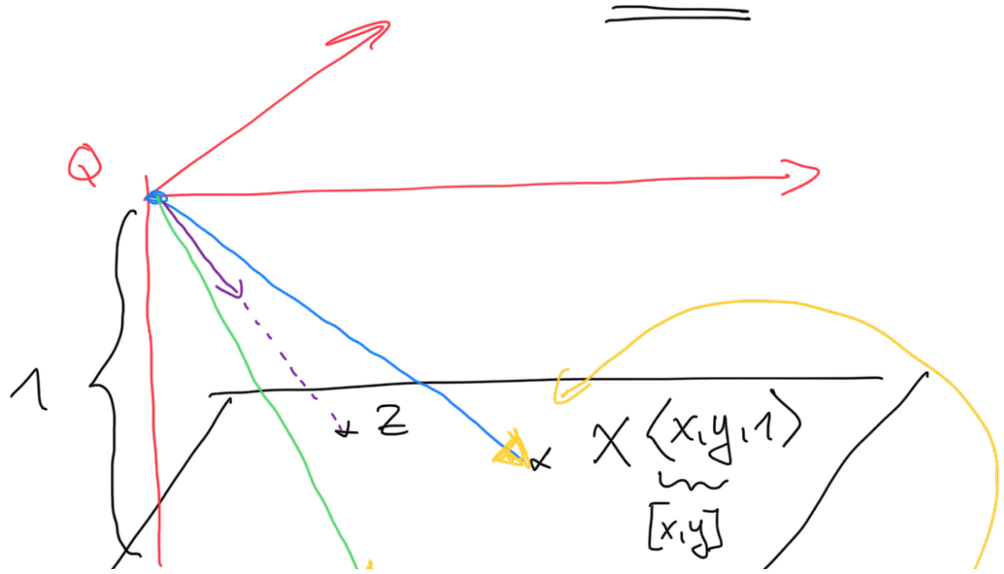
$$A[a_1, a_2] \quad \Big\} \quad (a_1, a_2) \quad \Big\{ \quad A\langle a_1, a_2, 1 \rangle$$

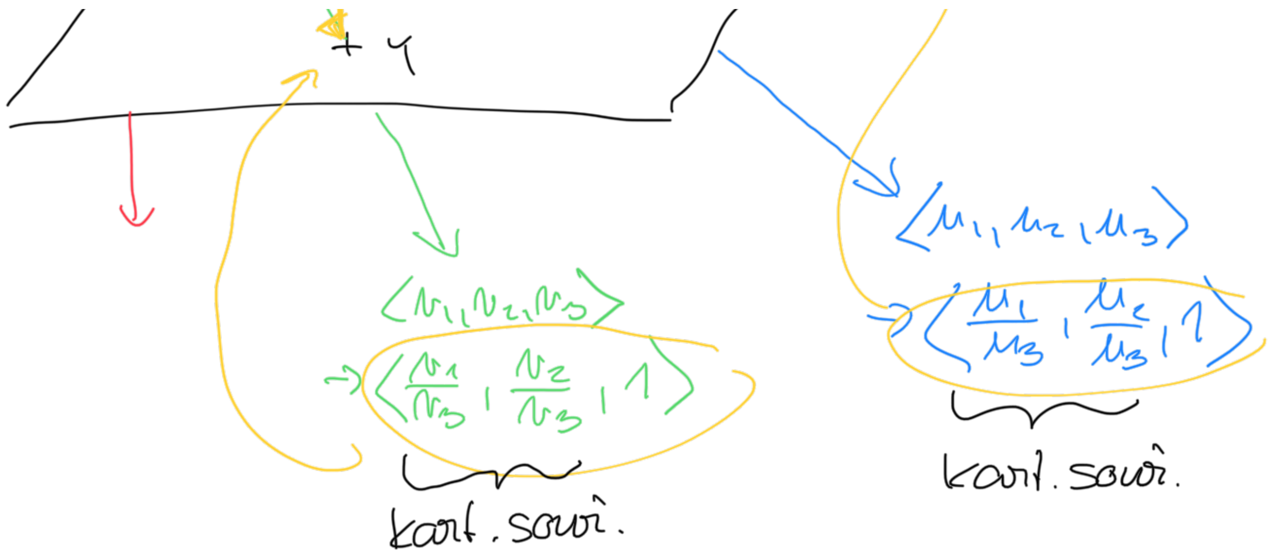
$$\vec{u} = (u_1, u_2) \quad \Big\} \quad (u_1, u_2) \quad \Big\{ \quad U\langle u_1, u_2, 0 \rangle$$

nevlastný bod

Nevlastný bod → „bod v nekonečnu"

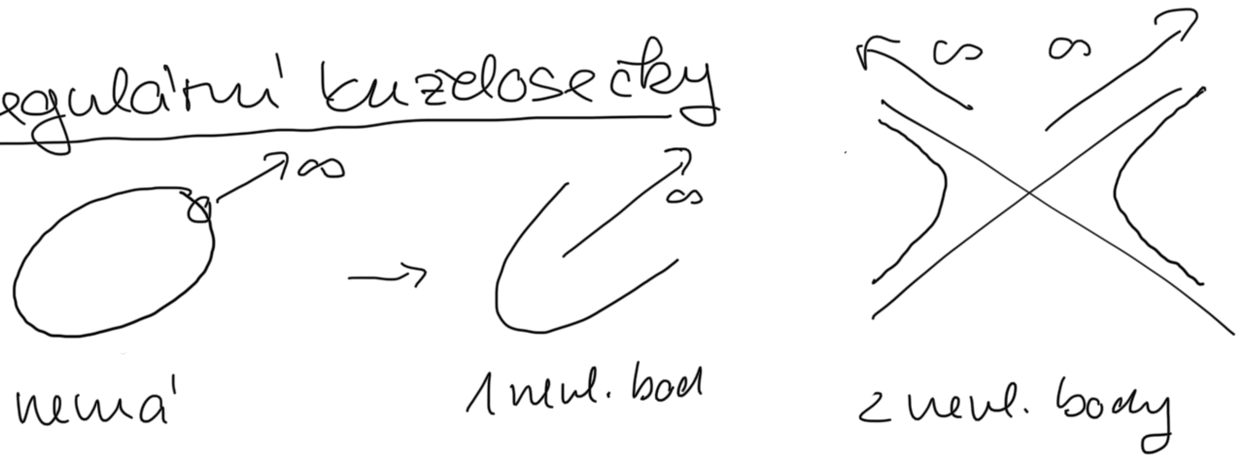
smer





$$-x^2+2xy+3y^2-2x+4y+1=0$$

Regulární kuželosečky



Příklad: $-x^2+2xy+3y^2-2x+4y+1=0$

Ze zavedení homogenních souřadnic

$$X\langle x,y,z\rangle \longrightarrow X\langle \underbrace{\tfrac{x}{z},\tfrac{y}{z}}_{\text{kartézské souř.}},1\rangle$$

$$-\left(\frac{x}{z}\right)^2+2\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}+3\left(\frac{y}{z}\right)^2-2\frac{x}{z}+4\frac{y}{z}+1=0 \quad /\cdot z^2$$

$$-x^2+2xy+3y^2-2xz+4yz+z^2=0 \qquad (*)$$

rovnice kuželosečky v homogenních souř.

→ <u>homogenní rovnice</u>

<u>úkol</u>: Určete nevlastní body kuželosečky

nevlastní bod: $X\langle x, y, 0\rangle$

tj. $z = 0$

Dosadíme do rovnice $(*)$ $z=0$:

$$-x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$$

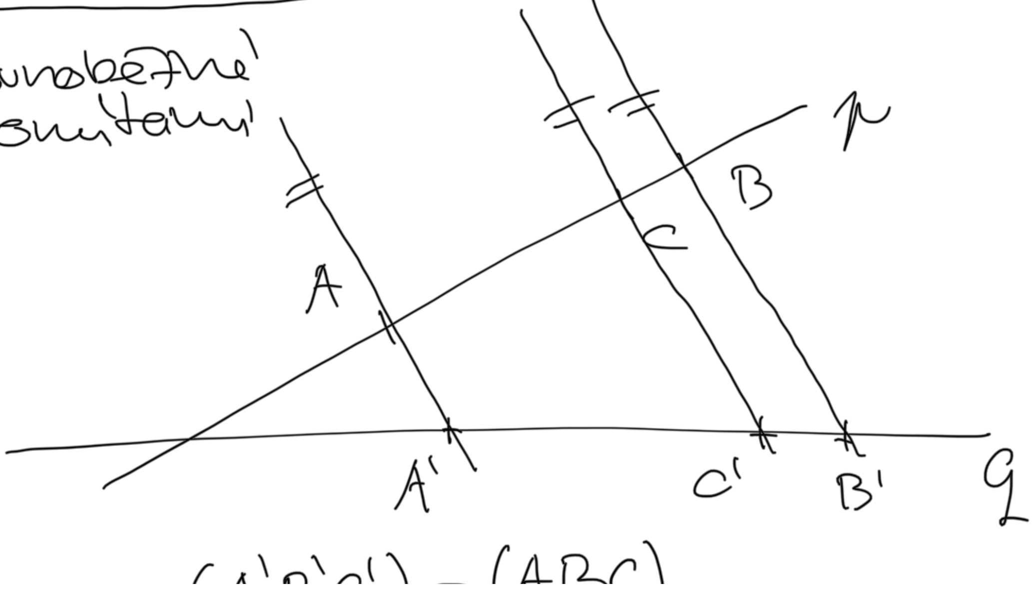
zvolím: $y = 1 \rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} \nearrow 3 \\ \searrow -1 \end{cases}$$

Řešení: $\left.\begin{array}{l} X_1\langle 3, 1, 0\rangle \\ X_2\langle -1, 1, 0\rangle \end{array}\right\}$ kuželosečka má 2 nevl. body, tj. je to <u>hyperbola</u>

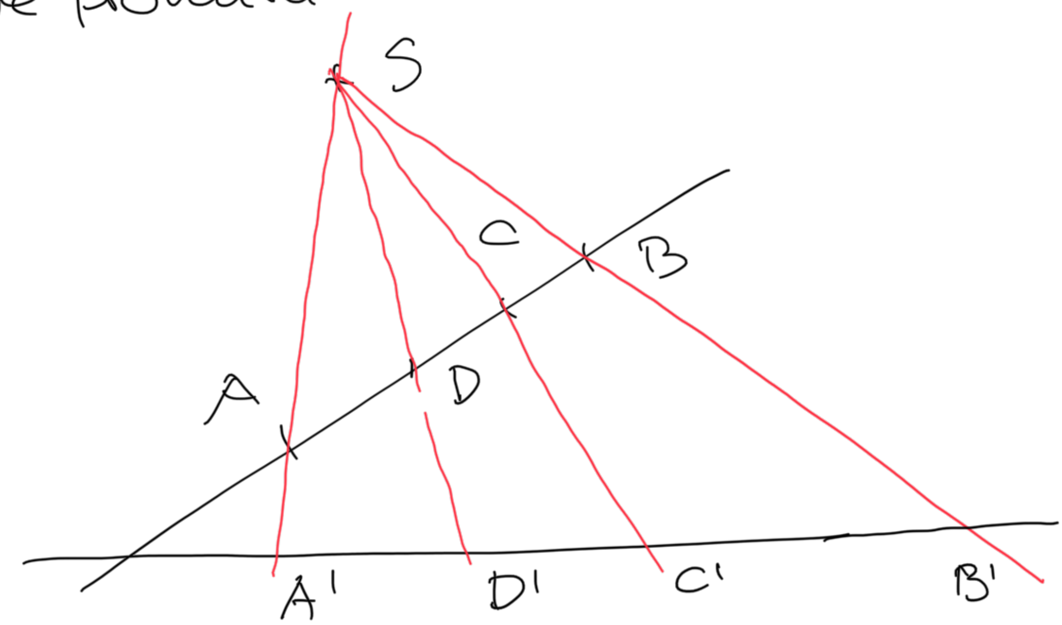
Rovnoběžné promítání



$(A'B'C') = (ABC)$

$(ABC') = (ABC)$

Středové promítání



$(A'B'C') \neq (ABC)$

Zachovává se dvojpoměr

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$$

tj. platí $(A'B'C'D') = (ABCD)$

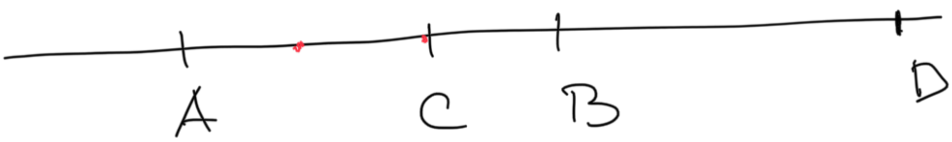
Harmonická čtveřice

$$(ABCD) = -1$$

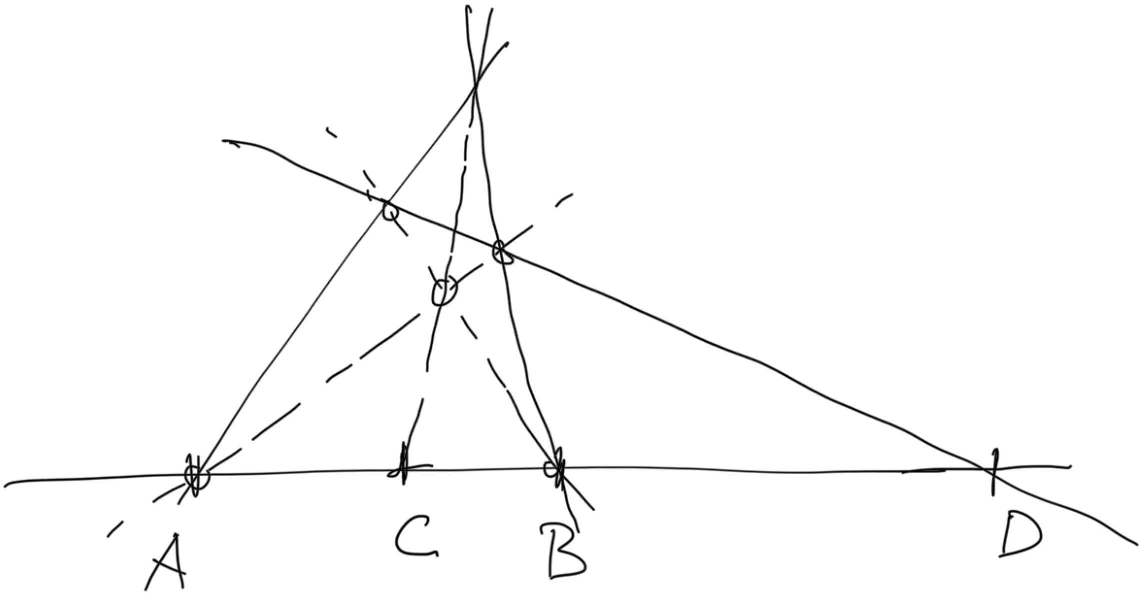
$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$(ABC) < 0$ uvnitř

$(ABC) > 0$ vně



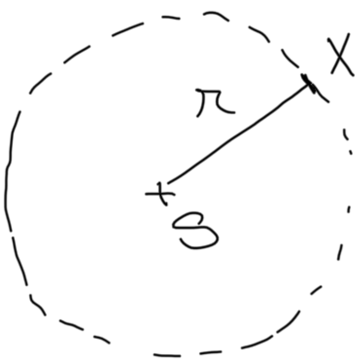
$(ABC) = -2$, tj. hledáme D tak, aby
$(ABD) = 2$



konstrukce harm. čtveřice
úplný čtyřroh

<u>Kružnice</u>

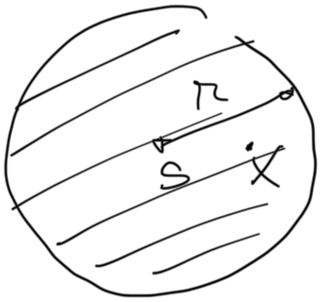
$k(S,r)$



$k = \{X; |SX| = r\}$

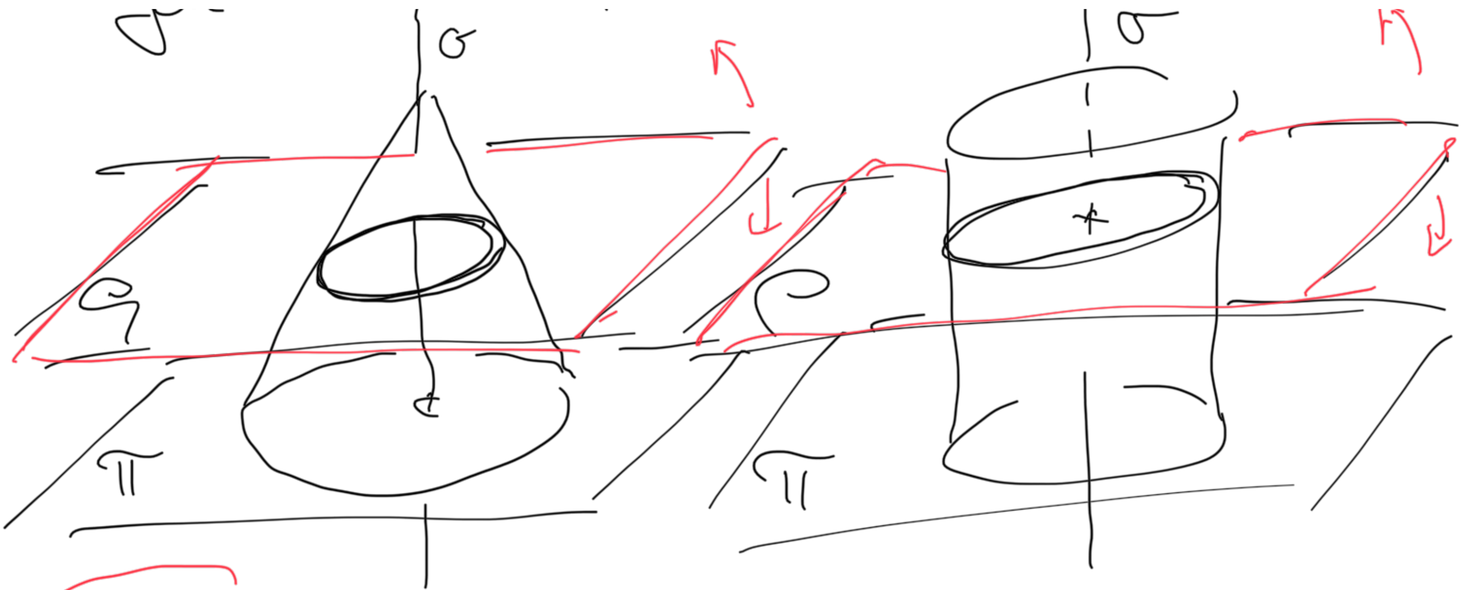
<u>Kruh</u>

$K(S,r)$



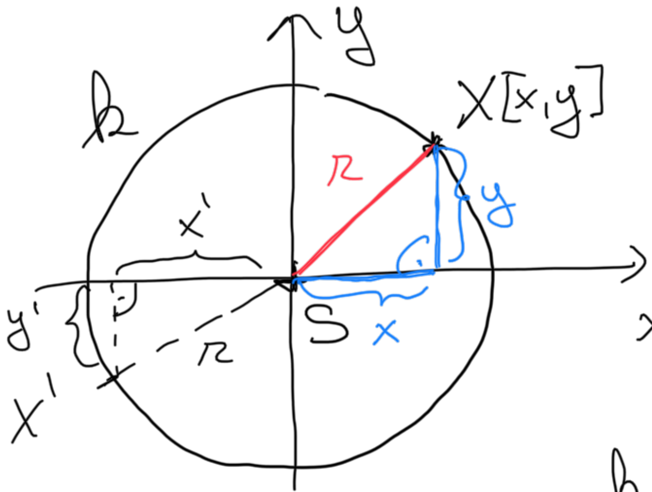
$K = \{X; |SX| \le r\}$

hko řez. na <u>kuželové</u> (válcové) <u>ploše</u>

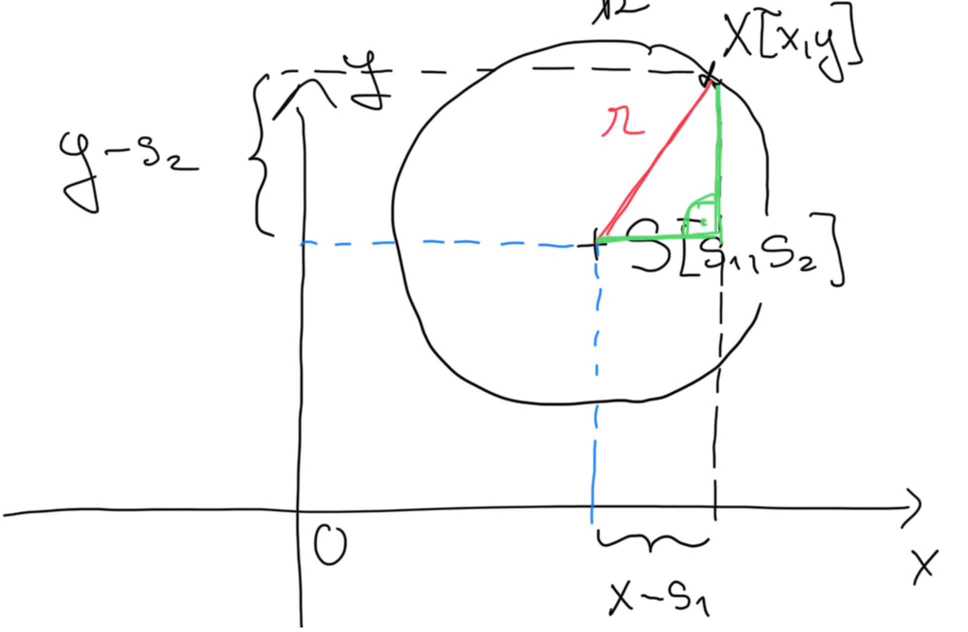


$\rho \perp \sigma, \rho \parallel \pi$

Rovnice kružnice

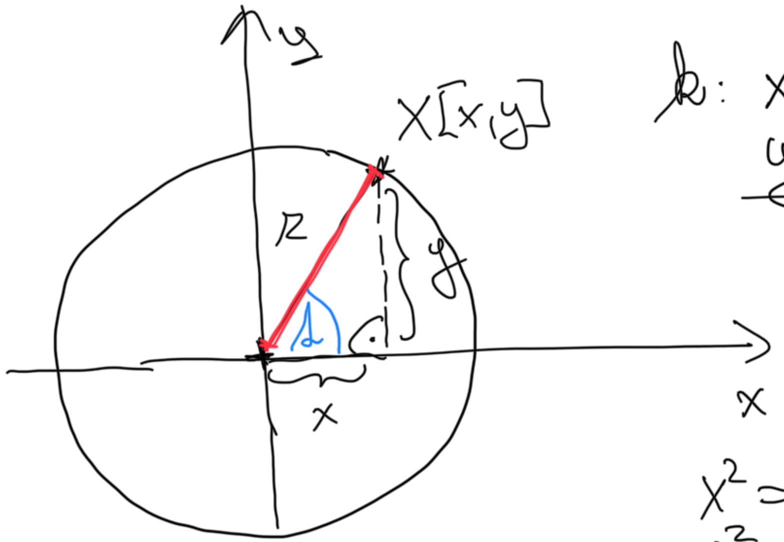


$$\boxed{k: x^2 + y^2 = r^2}$$



$$\boxed{k: (x-s_1)^2+(y-s_2)^2=r^2}$$

Parametrické rovnice kružnice

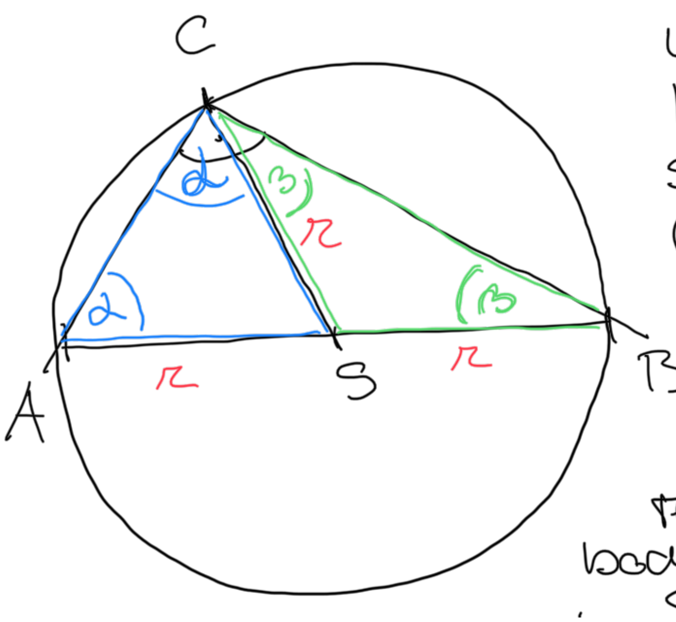


$$k: \begin{aligned} x &= r\cdot\cos t \\ y &= r\cdot\sin t\ ;\ t\in\langle 0;2\pi) \end{aligned}$$

$$x^2=r^2\cdot\cos^2 t$$
$$y^2=r^2\cdot\sin^2 t$$
$$x^2+y^2=r^2(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1})$$

$$x^2+y^2=r^2$$

Thaletova kružnice. Thaletova věta

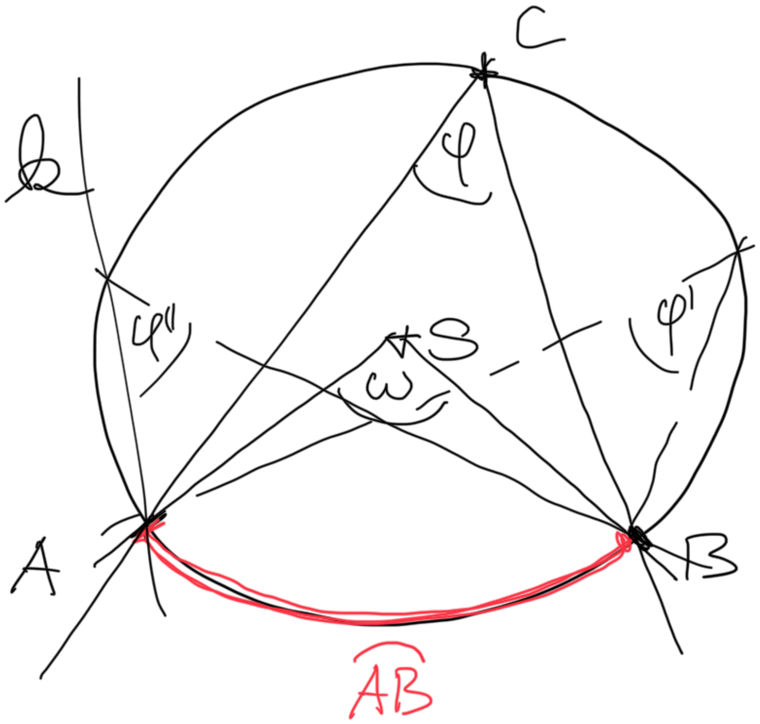


úhel ∢ACB pro C ležící na kružnici s průměrem AB (mimo body A,B) je pravý

a naopak, vrchol pravého úhlu, jehož ramena procházejí body A,B, leží na kružnici s průměrem AB kružnice s průměrem AB.

$$\alpha+\alpha+\beta+\beta = 180^\circ$$
$$2(\alpha+\beta) = 180^\circ$$
$$\alpha+\beta = 90^\circ \Rightarrow$$ při vrcholu C je pravý úhel

Obvodový a středový úhel

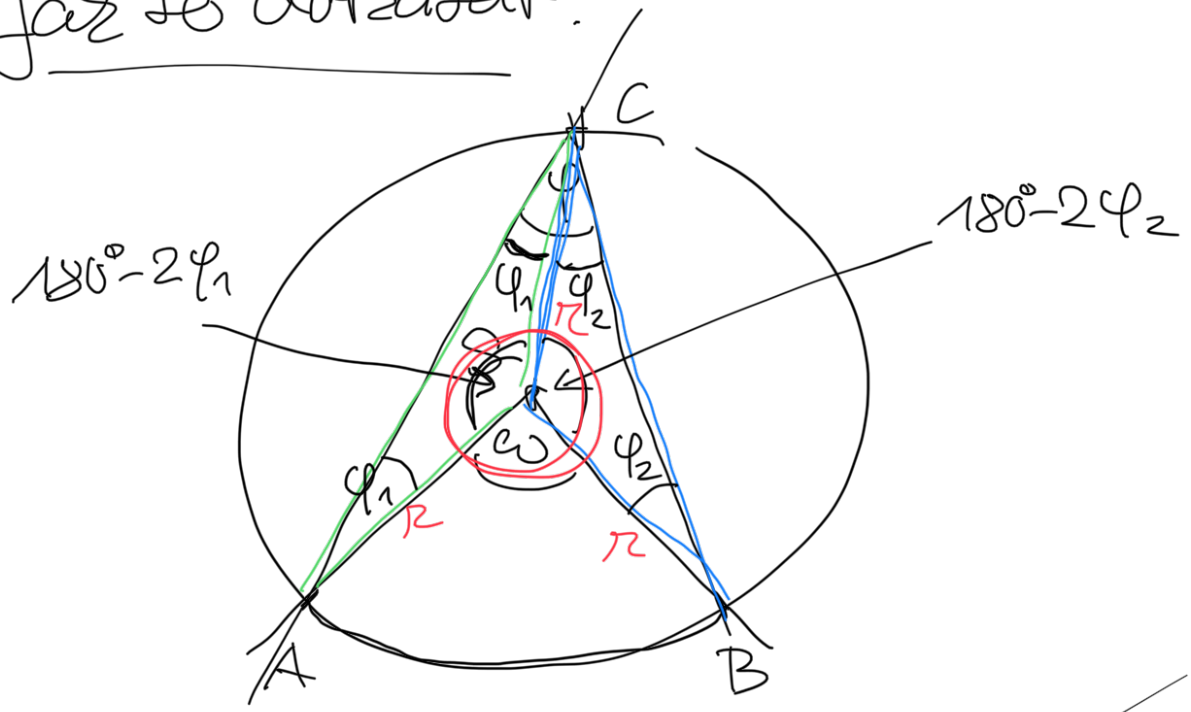


$$\boxed{\omega = 2\varphi, \quad \varphi = \frac{\omega}{2}}$$

⇒ protože středový úhel je pro daný oblouk jediný, totéž platí i pro velikost obvodového úhlu

⇒ všechny obvodové úhly příslušející témuž oblouku jsou stejné

Jak to dokázat:



$$\omega + \cancel{180°} - 2\varphi_1 + \cancel{180°} - 2\varphi_2 = \cancel{360°}$$

$$2\varphi_1 + 2\varphi_2 = \omega$$

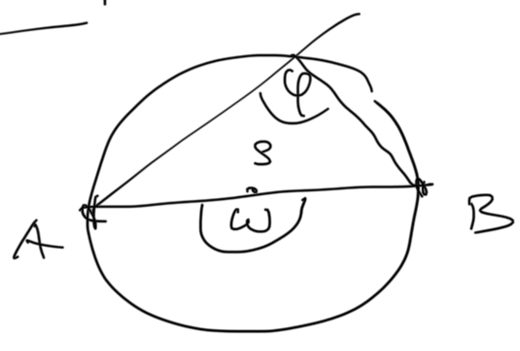
$$2(\underbrace{\varphi_1 + \varphi_2}_{}) = \omega$$

$$\boxed{2\varphi = \omega}$$

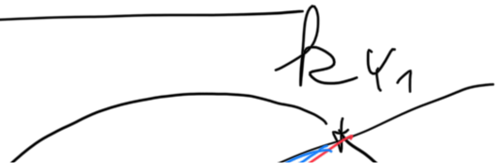
Thaletova věta:

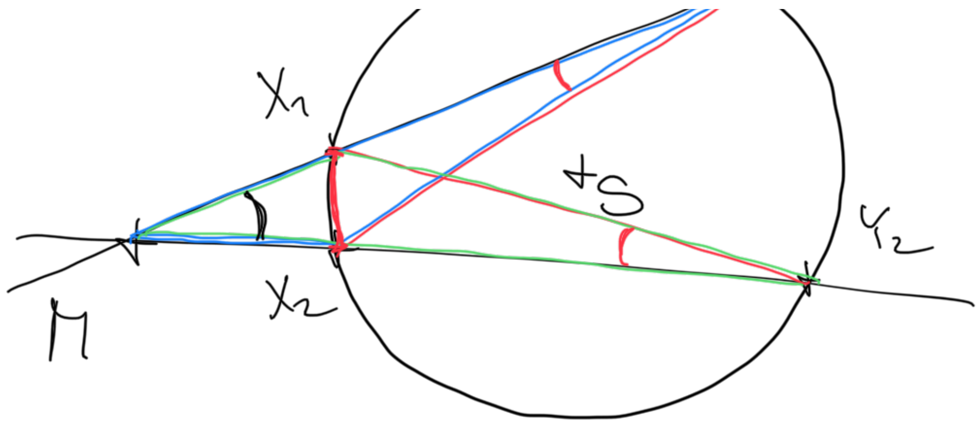
$\omega = 180°$

tj. $\varphi = \frac{\omega}{2} = 90°$



Mocnost bodu ke kružnici





$$|MX_1|\cdot|MY_1| = |MX_2|\cdot|MY_2| = \underline{\text{konst.}}$$

Kdy jsou si dva △ podobné?

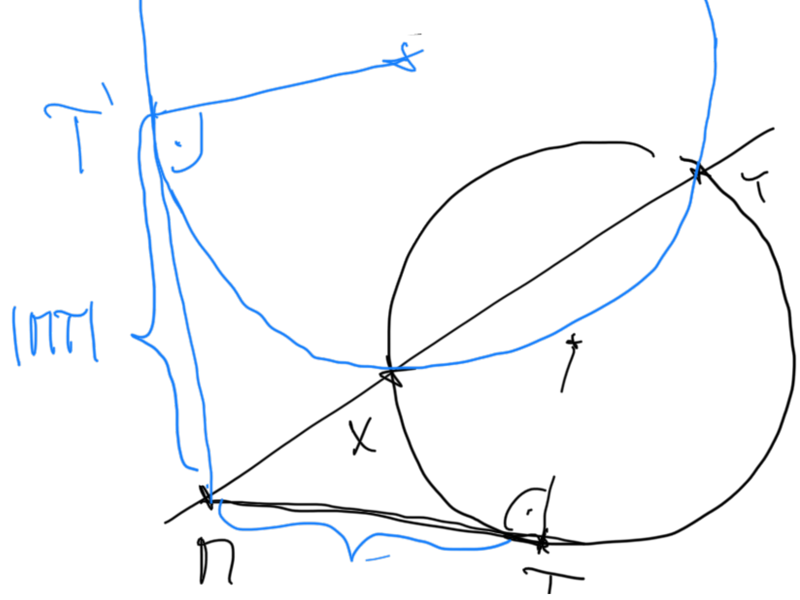
→ pokud se shodují ve vnitřních úhlech

$$\triangle MX_2Y_1 \overset{(uu)}{\sim} \triangle MX_1Y_2$$

$$\frac{|MX_2|}{|MX_1|} = \frac{|MY_1|}{|MY_2|} \quad / \cdot |MX_1|\cdot|MY_2|$$

$$|MX_2|\cdot|MY_2| = |MX_1|\cdot|MY_1|$$

Q.E.D.



$$\underline{|MX|\cdot|MY| = |MT|^2}$$

$$|MT| = |MT'|$$